Научная статья
УДК 519.6+515.127
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-5-18

ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ ВЕЛИЧИНЫ АЛЕКСАНДРОВСКОГО ПОПЕРЕЧНИКА КОМПАКТА БЕСКОНЕЧНО ГЛАДКИХ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССА ЖЕВРЕ

Владимир Никитич Белых

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия

belykh@math.nsc.ru; https://orcid.org/0000 0002 4428 3087

Аннотация

Вычислена оценка снизу убывания к нулю при $n \to \infty$ александровского n-поперечника компакта непериодических C^{∞}-гладких функций Жевре класса $\alpha \geq 1$, определяемая характером роста мажоранты k-ых производных его элементов при $k \to \infty$.

Ключевые слова и фразы

компакт, класс Жевре, топологическая размерность, александровский поперечник, запас гладкости, ненасыщаемость .

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0008))

Для цитирования

Белых В. Н. Об оценке снизу величины александровского поперечника компакта бесконечно гладких непериодических функций класса Жевре // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 3, С. 5-18. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-5-18

On estimating the value of the Alexandrov‘s width of a compact from below infinitely smooth aperiodic functions of the Gevrey’s class

Vladimir N. Belykh

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch Russian Academy of Sciences, Russia

belykh@math.nsc.ru; https://orcid.org/0000 0002 4428 3087

Abstract

A bottom-down estimate of decreasing to zero at $n \to \infty$ of the Alexandrov's n-width of a compact aperiodic C^∞-smooth Gevrey's functions of class $\alpha \geq 1$ is calculated, determined by the growth pattern of the majorant of the k-th derivatives of its elements at $k \to \infty$..

Keywords

compact set, Gevrey's class, topological dimension, Alexandrov's width, amount of smoothness, unsaturation.

Funding

The work was completed within the framework of the state assignment of the SB RAS assignment (project FWNF-2022-0008)

For citation

Belykh V. N. On estimating the value of the Alexandrov's width of a compact from below infinitely smooth aperiodic functions of the Gevrey's class // *Mat. Trudy*, 2025, Т. 28, № 3, С. 5-18. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-5-18

§ 1. Введение и постановка задачи

При конструировании численных алгоритмов решения краевых задач речь всегда идёт об аппроксимации континуальных объектов X конечномерными и о построении аналогов последних, отправляясь от понятий, допускающих финитную формализацию [1]. Наилучшее финитное описание объекта X, определенным образом организованного в метрический компакт, приводит к понятию александровского поперечника $\alpha_n(X)$, который определяется как нижняя грань ε-сдвигов X в компакт X^n топологической размерности $\dim X^n \leq n$. Содержательное представление об асимптотике $\alpha_n(X)$ извлекается при этом средствами теории приближений, если найден и исследован подходящий для X аппроксимационный аппарат. Определив точность, с которой компакт X исчерпывается компактами топологической размерности $\leq n$, величина александровского поперечника указывает погрешность финитного описания X с помощью n числовых независимых параметров, руководствуясь исключительно информацией о "гладкостной" структуре X: чем большей гладкостью обладает компакт X, тем быстрее с ростом n убывает к нулю $\alpha_n(X)$. Качественная финитизация функционального компакта X определяется таким образом наследованием ею дифференциальных свойств X. Последнее привело К.И. Бабенко [2],[3] к открытию принципиально новых — *ненасыщаемых* — вычислительных методов, способным автоматически с ростом “запаса” гладкости X (при прочих равных условиях) самосовершенствоваться, черпая приращение своей практической эффективности непосредственно в дифференциальной природе X (*феномен ненасыщаемости*). При этом пик эффективности ненасыщаемых численных методов — *экспоненциальная сходимость* — достигается на классе бесконечно гладких X. И это принципиально отличает ненасыщаемые численные методы от методов, имеющих главный член погрешности: конечно-разностных, конечных элементов, квадратур и др. [4].

Существуют классы задач (например, эллиптические [5]), компакты X решений которых состоят из C^∞-гладких функций различной природы. Классы таких функций, занимающих промежуточное положение между функциями аналитическими и функциями конечной гладкости, задаются обычно указанием мажоранты роста их k-х производных при $k \to \infty$.

В работе указана оценка снизу величины александровского поперечника $\alpha_n(X)$ компакта непериодических C^∞-гладких функций Жевре класса $\alpha \geq 1$, ограниченно вложенного в пространство C непрерывных на конечном отрезке функций. Результат базируется на ранее предложенном автором описании 2π-периодических C^∞-гладких функций тригонометрическими многочленами [6], а также полученной в работе [7] оценке снизу величины александровского поперечника компакта 2π-периодических C^∞-гладких функций.

§ 2. Компакт: размерность, александровский поперечник

Во введении, говоря о финитизации компакта X, мы несколько неопределённо характеризовали её, указывая лишь на то, что элементы X определяются конечным набором числовых независимых параметров. Хотя совсем не очевидно, что идею числа измерений можно математически сформулировать для столь общих объектов как функциональный компакт.

Пусть X — компакт в банаховом пространстве B и Υ — его открытое конечное покрытие. Выбор конечного покрытия Υ неоднозначен, поскольку согласно теореме Бореля-Лебега у рассматриваемой задачи есть много решений. Каково, однако, должно быть топологическое свойство элементов покрытия Υ, чтобы оно могло быть положено в основу процедуры отбора нужного?

Из совокупности общих топологических свойств элементов покрытия Υ выделяется следующее. Пусть $n \geq 0$ целое число. Покрытие Υ имеет *кратность* n, если любые $(n+1)$ его элементов не пересекаются, и существует n элементов, имеющих непустое пересечение. Понятие кратности покрытия Υ, основывающееся на закономерностях естественного зрительного восприятия компакта, однозначно связано с его аппроксимационной размерностью, делающим представление о размерности компакта X (как числа измерений) внутренне непротиворечивым.

Определение (см. [8, гл. 1, § 1.7, п. 1.7.3]). Компакт X имеет топологическую размерность n ($\dim X = n$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-покрытие X открытыми множествами диаметра $< \varepsilon$ и кратности $\leq n+1$, но для достаточно малого ε уже не существует открытого ε-покрытия, кратность которого не превосходит n.

Таким образом с каждым ε-покрытием функционального компакта X всегда можно связать некое натуральное число, а именно число n, для которого в X существует точка, принадлежащая n различным элементам Υ. Т.е. представление об n-мерном компакте как топологическом пространстве, элементы которого задаются набором из n числовых независимых параметров, формализуется с помощью понятия размерности. Введённое определение размерности вполне покрывает интуитивное представление о размерности, например, пространства R^n, поскольку верна теорема Лебега-Брауэра, гласящая о том, что $\dim R^n = n$.

Александровский поперечник компакта X задаётся [4, гл. 1, § 2, п. 4]:

$$\alpha_n(X, B) = \inf_{(X^n,\,\nu)} \sup_{f \in X \subset B} \|f - \nu(f)\|, \tag{1}$$

где inf берётся по всевозможным парам (X^n, ν), состоящим из лежащего в банаховом пространстве B компакта X^n топологической размерности n и непрерывного отображения $\nu : X \to X^n$.

Введение П.С. Александровым [9] понятия поперечника свидетельствует о принципиально важной связи компакта X в банаховом пространстве B с элементарными геометрическими образованиями X^n в нём. В итоге, каждую точку f функционального компакта $X \subset B$ следует задавать с точностью ε непременно n “координатами”, если желать, чтобы эти координаты непрерывно зависели от точки, а сама точка — от координат.

§ 3. Непериодический C^∞-гладкий класс Жевре. Результат.

Пусть $C \equiv C[I]$ — пространство вещественных непрерывных на отрезке $I \equiv [-1,1]$ функций $\psi(t)$ с нормой $\|\psi\| = \max\limits_{t\in[-1,1]} |\psi(t)|$; $\mathcal{P}^n \subset C$ — подпространство алгебраических многочленов степени не выше n ($n \geq 0$ целое); $C^k \equiv C^k[I]$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых на I функций с нормой $\|\psi\|_k = \max_{0\leq\nu\leq k} \|\psi^{(\nu)}\|$; $C^\infty \equiv C^\infty[I]$ — пространство бесконечно непрерывно дифференцируемых на отрезке I функций.

Пусть $E_n(\psi) \equiv \inf\limits_{v_n\in\mathcal{P}^n} \|\psi - v_n\|$ — наилучшее чебышёвское приближение непрерывной функции ψ многочленом; причём inf всегда достигается на некотором элементе v_n из подпространства $\mathcal{P}^n$.

Вещественную C^∞-гладкую на отрезке I функцию $\psi(t)$ назовём функцией Жевре класса $\alpha \geq 1$, если существуют положительные константы c и A такие, что для каждой точки $t \in I$ и $\forall k \geq 0$ справедливы неравенства

$$|\,\psi^{(k)}(t)| \leq c\,A^k\,k^{\alpha\,k}, \quad \alpha \geq 1, \quad c > 0,\ A > 0. \tag{2}$$

Конструктивное описание функций ψ из пространства $C^{\,k}$ алгебраическими многочленами опирается на теорему Джексона-Зинвела [10]:

$$E_n(\psi) \leq \mathcal{K}_k \|\psi^{(k)}\| \frac{(n-k)!}{n!}, \ \ n \geq k > 0, \ \ \mathcal{K}_k = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{(k+1)\nu}}{(2\nu+1)^{k+1}} \leq \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Здесь $\mathcal{K}_k$ — классические постоянные Фавара [11]:

Правую часть неравенства (3) удобно преобразовать к виду (см. [12]):

$$E_n(\psi) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \left(\sqrt[k]{\frac{n^k (n-k)!}{n!}} \right)^k \frac{\|\psi^{(k)}\|}{n^k} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^k \|\psi^{(k)}\|}{n^k}, \quad n \geq k > 0. \tag{4}$$

Пусть $H \equiv \{H(k)\}$ — последовательность положительных чисел.

В силу классической теоремы Арцела множество C^∞-гладких функций

$$K_H^\infty \equiv K_H^\infty[I] = \left\{ \psi \in C^\infty : \|\psi\| \leq H(0),\ \|\psi^{(k)}(t)\| \leq H(k),\ \forall k > 0 \right\}$$

— компакт в пространстве C непрерывных на отрезке I функций.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 5-18
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 5-18

В работе [6] предложен способ описания компакта K_H^∞ в терминах функции $\lambda(r)$ числового аргумента $r \geq 0$, конструируемой по набору $\{H(k)\}$, который связан с мажорантой $H(k)$ посредством неравенства (4).

Пусть $f \notin \mathcal{P}^n$, $\|f\| \leq H(0)$, $\|f^{(k)}\| \leq H(k)$ и $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{H(k)} = \infty$. Сопоставим последовательности $\{H(k)\}$ функцию аргумента $r \geq 0$:

$$\lambda(r) = \begin{cases} H(0), & 0 \leq r < 1, \\ \min\limits_{0\leq k\leq r} \dfrac{H(k)}{r^k}, & r \geq 1, \end{cases}$$

Теорема 1 (см. [6]). *При $r \geq 1$ функция $\lambda(r)$ строго монотонно убывает, непрерывна справа и стремится к нулю при $r \to \infty$; $\lambda(r)$ стремится к нулю при $r \to \infty$ быстрее любой конечной степени числа r, т.е. для $\forall p \geq 0$ справедливо следующее предельное соотношение $\lim\limits_{r\to\infty} r^p\lambda(r) = 0$.*

Согласно теореме 1 неравенство (4) переписывается ещё так:

$$E_n(f) \leq \frac{\pi}{2}\,\lambda\left(\frac{n}{e}\right) \quad \text{и} \quad \lambda(r) = \min_{0\leq k\leq r} \frac{H(k)}{r^k}. \tag{5}$$

Оценка сверху александровского поперечника $\alpha_n\big(K_H^\infty, C\big)$ извлекается из определения (1). Действительно, учитывая (1) и (5) находим:

$$\alpha_n\big(K_H^\infty, C\big) = \inf_{(X^n,\,\nu)} \sup_{f\in K_H^\infty\subset C} \|f-\nu(f)\| \leq \sup_{f\in K_H^\infty\subset C} E_n(f) \leq \frac{\pi}{2}\cdot\lambda\left(\frac{n}{e}\right).$$

Откуда находим нужную нам для дальнейшего оценку сверху для величины александровского поперечника компакта C^∞-гладких (непериодических) функций Жевре класса $\alpha \geq 1$ (подробности см. [13]):

$$\alpha_n\big(K_H^\infty, C\big) \leq c\cdot b\,e^{-\rho\sqrt[\alpha]{n}}, \;\; \rho = \alpha e^{-1}/\sqrt[\alpha]{A/e}, \;\; b = 0.5\pi\,e^{0.5\,\alpha\,e\sqrt[\alpha]{A/e}}. \tag{6}$$

Получим теперь для величины $\alpha_n(K_H^\infty, C)$ оценку снизу. Для этого нам понадобятся оценки некой вспомогательной функции $\mu(r)$, связанной с классом C^∞-гладких 2π-периодических функций Жевре, имеющим мажоранту $G(k) = cA^k k^{\alpha k}$.

Введём несколько необходимых для определения функции $\mu(r)$ фактов.

Пусть $\widetilde{C} \equiv \widetilde{C}[0, 2\pi]$ — класс 2π-периодических непрерывных на всей оси R функций с нормой $\|\varphi\| = \max\limits_{t\in[0,2\pi]} |\varphi(t)|$. Пространство $\widetilde{C}$ будем трактовать как пространство $C[S]$ непрерывных на единичной окружности $S \equiv [\,0, 2\pi)$ функций, которые остаются непрерывными при 2π-периодическом их продолжении на всю ось R. Пусть $\widetilde{C}^k \equiv C^k[S]$ — пространство таких $k \geq 0$ раз непрерывно дифференцируемых на S периодических функций с нормой $\|\varphi\|_k = \max_{0\le\nu\le k}\|\varphi^{(\nu)}\|$; $\widetilde{C}^\infty \equiv C^\infty[S]$ — класс 2π-периодических бесконечно гладких на окружности S функций.

Если $\mathcal{T}^m \subset \widetilde{C}$ — подпространство тригонометрических многочленов порядка не выше m ($m \ge 0$ целое), то

$$e_m(\varphi) = \inf_{\iota_m\in\mathcal{T}^m}\|\varphi - \iota_m\|, \quad \varphi \in \widetilde{C} \tag{7}$$

— наилучшее приближение периодической функции φ многочленом из $\mathcal{T}^m$.

Пусть $G \equiv \{G(k)\}$ — последовательность положительных чисел.

В силу теоремы Арцела класс функций

$$\widetilde{K}_G^\infty \equiv \widetilde{K}_G^\infty[S] = \left\{\varphi \in \widetilde{C}^\infty : \|\varphi\| \le G(0), \|\varphi^{(k)}(s)\| \le G(k), \forall k > 0\right\}$$

является компактом в пространстве $\widetilde{C}$ 2π-периодических на S функций.

Классический подход к конструктивному описанию функций $\varphi(s)$ из пространства $\widetilde{C}$ основывается на учёте для целых $m \ge 0$ классических неравенств Фавара-Ахиезера-Крейна для $\forall k \ge 0$ (см. [4, гл. 3, § 1, п. 5])

$$e_m(\varphi) \le \mathcal{K}_k \cdot \frac{\|\varphi^{(k)}\|}{m^k}, \quad m \ge 0, \quad \mathcal{K}_k = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{(k+1)\nu}}{(2\nu+1)^{k+1}} \le \frac{\pi}{2}$$

и состоит в построении по набору $\{G(k)\}$ следующей функции

$$\mu(r) = \begin{cases} G(0), & 0 \le r < 1,\\ \inf\limits_{k\ge 0}\dfrac{G(k)}{r^k}, & r \ge 1,\end{cases}$$

числового аргумента r, обладающей на полуоси $r \ge 0$ рядом полезных свойств. Формулы для вычисления констант Фавара $\mathcal{K}_k$ указаны в [11].

Теорема 2 (см. [6]). *Пусть* $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{G(k)} = \infty$. *При* $r \ge 1$ *функция* $\mu(r)$ *строго монотонно убывает, непрерывна и стремится к нулю при* $r \to \infty$. *При этом функция* $\mu(r)$ *стремится к нулю быстрее любой конечной степени числа* r, *т.е. для* $\forall\, p \ge 0$ *верно равенство* $\lim\limits_{r\to\infty} r^p\mu(r) = 0$.

Знак inf в определении функции $\mu(r)$ можно заменить на min, т.е.

$$\mu(r) = \min_{k\ge 0}\frac{G(k)}{r^k}, \quad e_m(\varphi) \le \frac{\pi}{2}\mu(m).$$

В работе [6] дано описание компакта $\widetilde{K}_G^\infty$ в терминах функции $\mu(r)$. Свойства функции $\mu(r)$ являются ключевыми в нашем подходе к получению оценки снизу для величины $\alpha_m(\widetilde{K}_G^\infty, \widetilde{C})$ александровского поперечника компакта C^∞-гладких 2π-периодических функций Жевре класса $\alpha \ge 1$.

Вещественную 2π-периодическую $\widetilde{C}^\infty$-гладкую на S функцию $\varphi(s)$ назовём функцией Жевре класса $\alpha \geq 1$, если существуют положительные константы c и A такие, что для каждой точки s окружности S и для всякого целого $k \geq 0$ справедливы неравенства (сравни с (2))

$$|\,\varphi^{(k)}(s)| \leq c\,A^k\,k^{\alpha\,k}, \quad \alpha \geq 1, \quad c > 0,\ A > 0.$$

В работе [7] получена оценка снизу для величины поперечника $\alpha_m(\widetilde{K}_G^\infty, \widetilde{C})$ компакта 2π-периодических функций Жевре класса $\alpha \geq 1$. Вот она:

$$\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, \widetilde{C}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu(m)}{(2\varpi)}, \quad \mu(m) = c \cdot \min_{k \geq 0} \frac{A^k k^{\alpha k}}{m^k},\ \varpi \equiv 2 + e\sqrt[\alpha]{A}. \tag{8}$$

Завершим оценку снизу (8) для $\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, \widetilde{C})$ следующим результатом.

Рассмотрим функцию

$$\mu_\alpha(\xi) = \min_{k \geq 0} \frac{k^{k\,\alpha}}{\xi^k}, \quad 0 < \xi < \infty, \quad \alpha \geq 1.$$

Теорема 3. *Для функции $\mu_\alpha(\xi)$ справедливы двусторонние оценки:*

$$e^{-\dfrac{\alpha}{e}\,\xi^{1/\alpha}} \leq \mu_\alpha(\xi) \leq e^{\dfrac{\alpha\,e}{2}}\,e^{-\dfrac{\alpha}{e}\,\xi^{1/\alpha}}, \quad 0 < \xi < \infty, \quad \alpha \geq 1.$$

Доказательство. Отыскиваем минимум функции $k^{k\alpha}/\xi^k = f(k)$, считая k непрерывно меняющимся переменным. Действительно, логарифмируя, дифференцируя и приравнивая к нулю, получаем:

$$[\ln f(k_0)]' = \frac{f'(k_0)}{f(k_0)} = -\,\ln \xi + \alpha \ln k_0 + \alpha = 0, \tag{9}$$

здесь k_0 — значение k, на котором реализуется минимум функции $f(k)$.

Из (9) находим: $k_0 = \frac{1}{e}\,\xi^{1/\alpha}$ и, следовательно,

$$\min_k \ln f(k) = -\,\frac{\alpha}{e}\,\xi^{1/\alpha}, \quad \min_k\ f(k) = e^{-\dfrac{\alpha}{e}\,\xi^{1/\alpha}}.$$

Но k изменяется по натуральным числам, так что $\min_k f(k)$ несколько выше найденного. И поскольку

$$[\ln f(k)]'' = \frac{\alpha}{k} > 0,$$

в целой точке k_1, ближайшей справа к k_0 верно,

$$\ln f(k_1) = \ln f(k_0) + \frac{\alpha}{2k_2}(k_1 - k_0)^2 < \ln f(k_0) + \frac{\alpha}{2k_0} \quad (k_0 < k_2 < k_1).$$

Следовательно,

$$\min_k \ln f(k) \le \ln f(k_1) < \ln f(k_0) + \frac{\alpha}{2k_0} = -\frac{\alpha}{e}\,\xi^{1/\alpha} + \frac{\alpha\, e}{2}\,\xi^{-1/\alpha},$$

откуда

$$\min_k f(k) < e^{\dfrac{\alpha\, e}{2}\,\xi^{-1/\alpha}}\; e^{-\dfrac{\alpha}{e}\,\xi^{1/\alpha}}. \tag{10}$$

Первый множитель в (10) при $\xi \ge 1$ ограничен величиной $C = e^{\dfrac{\alpha\, e}{2}}$. Если же $0 < \xi < 1$, то

$$\min_k \frac{k^{\alpha k}}{\xi^k} \le 1 \le e^{\dfrac{\alpha\, e}{2}}\; e^{-\dfrac{\alpha}{e}\,\xi^{1/\alpha}}.$$

Итак, при любых $\xi,\ 0 < \xi < \infty$, получаем неравенства

$$e^{-\dfrac{\alpha}{e}\,\xi^{1/\alpha}} \le \mu_\alpha(\xi) \le C\, e^{-\dfrac{\alpha}{e}\,\xi^{1/\alpha}}, \quad C = e^{\dfrac{\alpha\, e}{2}}.$$

Теорема 3 доказана.

Согласно теореме 3 для функции $\mu(m)$ имеем следующую оценку снизу:

$$c \cdot e^{-\rho \sqrt[\alpha]{m}} \le \mu(m), \quad \rho = \alpha e^{-1} / \sqrt[\alpha]{A}.$$

Подставив её в (8), находим оценку снизу величины александровского поперечника компакта $\widetilde{C}^\infty$-гладких 2π-периодических функций Жевре класса $\alpha \ge\ 1$:

$$\alpha_{2m+1}(\widetilde{K}^\infty_G, \widetilde{C}) \ge c{\cdot}a\, e^{-\rho \sqrt[\alpha]{m+1}},\ \rho = \alpha e^{-1} / \sqrt[\alpha]{A},\ a = \frac{1}{2\sqrt{2}}{\cdot}\frac{1}{2 + e\sqrt[\alpha]{A}}. \tag{11}$$

Теперь у нас есть всё необходимое для того, чтобы выписать оценку снизу для величины александровского поперечника $\alpha_n(K^\infty_H, C)$ компакта непериодических C^∞-гладких функций Жевре класса $\alpha \ge\ 1$.

Покажем, что компакт $\widetilde{K}^\infty_G[S]$ на окружности S непрерывно вкладывается в компакт $K^\infty_H[I]$ на конечном отрезке $I \equiv [-1, 1]$, а затем, воспользовавшись монотонностью поперечника $\alpha_n(K^\infty_H[I], C)$ по включению множеств, выпишем нижнюю оценку его величины при $n \to \infty$.

Пусть $\chi : I \to S$ — отображение, порождённое отождествлением противоположных концов отрезка I. Введём на I отношение эквивалентности L, объявив краевые точки отрезка I эквивалентными друг другу, а все остальные точки эквивалентными лишь себе. Отрезок I при этом разбивается на непересекающиеся подмножества — классы эквивалентности

I/L, а отображение $\chi : I \to S$ факторизуется в произведение двух отображений: непрерывного $I \to I/L$ и гомеоморфного $I/L \to S$, поскольку на множестве I/L определена фактор-топология, относительно которой отображение $I/L \to S$ — гомеоморфно [14, гл. 1, § 1.3, п. 6].

Рассмотрим совокупность $\hat{Y}$ функций $\varphi \in K_H^\infty[I]$, допускающих указанную факторизацию: $s = \chi(t) = \pi(1+t)$ и $\varphi(t) = \hat{\varphi}(s)$. Легко видеть, что отображение $\varphi \to \hat{\varphi}$ линейно и с не уменьшением расстояния осуществляет изометрическое (см. [15, гл. 3, § 7, предл. 3]) вложение $\iota : K_H^\infty[I] \to \widetilde{C}[S]$, причём $\iota(\hat{Y}) \supset \widetilde{K}_G^\infty[S]$; здесь $G \equiv \{\pi^{-k}H(k)\}$ и $\hat{\varphi}_s^{(k)} = \pi^{-k}\,\varphi_t^{(k)}$ $(\forall k \geq 0)$. Т.е. класс $\widetilde{K}_G^\infty[S] \subset \widetilde{C}^\infty$ с точностью до изометрии является подклассом класса $K_H^\infty[I] \subset C^\infty$ и потому $\alpha_{2n+1}(\widetilde{K}_G^\infty[S], \widetilde{C}) \leq \alpha_{n+1}(K_H^\infty[I], C)$. Но приближение 2π-периодических функций (см. (7)) тригонометрическими многочленами порядка не выше $n+1$ определяет подпространство $\mathcal{T}^n \subset \widetilde{C}$ топологической размерности $\dim \mathcal{T}^n = 2n+1$. Поэтому оценка снизу для величины $\alpha_{n+1}(K_H^\infty[I], C)$ будет найдена, если в неравенстве (11) константу A и параметр m выбрать равными соответственно значениям A/π и n. В результате находим двусторонние для поперечника $\alpha_n\big(K_H^\infty, C\big)$ оценки.

Теорема 4. *Оценки александровского n-поперечника $\alpha_n(K_H^\infty, C)$ компакта K_H^∞ непериодических C^∞-гладких функций Жевре класса $\alpha \geq 1$ с мажорантой $H(k) = cA^k k^{\alpha k}$ $(c > 0, A > 0)$, ограниченно вложенного в пространство непрерывных на отрезке $I = [-1, 1]$ функций имеют вид:*

$$c \cdot a\, e^{-\varrho_1 \sqrt[\alpha]{n}} \leq \alpha_n\big(K_H^\infty, C\big) \leq c \cdot b\, e^{-\varrho_2 \sqrt[\alpha]{n}}, \quad n \geq 0 \ \text{ – целое.}$$

Здесь

$$\varrho_1 = \alpha e^{-1} / \sqrt[\alpha]{A/\pi}, \quad a = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2 + e\,\sqrt[\alpha]{A/\pi}},$$

$$\varrho_2 = \alpha e^{-1} / \sqrt[\alpha]{A/e}, \quad b = 0.5\pi\, e^{0.5\,\alpha\, e\,\sqrt[\alpha]{A/e}}.$$

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания, способствующие лучшему восприятию полученных в работе результатов.

Список литературы

1. *Babenko K. I.* Estimating the quality of computational algorithms — part 1, 2 //*Computer methods in applied mechanics and engineering.* 1976. V. 7. 47–73, 135–152. North-Holland Publishing Company.

2. *Бабенко К. И.* Несколько замечаний о дискретизации эллиптических задач // *Доклады АН СССР.* 1975. Т. 221, №1. С. 11–14.

3. *Бабенко К. И.* О явлении насыщения в численном анализе // *Доклады АН СССР.* 1978. Т. 241, № 3. С. 505–508.

4. *Анучина Н. Н., Бабенко К. И., Годунов С. К. и др. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики.* М.: Наука, 1977. 295с.

5. *Белых В. Н.* Ненасыщаемые алгоритмы численного решения эллиптических краевых задач в гладких осесимметричных областях //*Математические труды.* 2022. Т. 25, № 1. С. 3–50.

   DOI: 10.33048/mattrudy.2022.25.101

6. *Белых В. Н.* О свойствах наилучших приближений C^{∞}-гладких функций на конечном отрезке (к феномену ненасыщаемости численных методов) //*Сибирский математический журнал.* 2005. Т. 46, № 3. С. 483–499.

7. *Белых В. Н.* Об асимптотике александровского n-поперечника компакта бесконечно гладких периодических функций класса Жевре //*Математические труды.* 2024. Т. 27, № 4. С. 5–18.

   DOI: 10.25205/1560-750X-2024-27-4-5-18

8. *Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений.* М.: Изд-во МГУ (1976), 304 с.

9. *Aleksandroff P. S.* Uber die Urysonsche Konstanten //*Fund. Math..* 1933. 20. 140-150.

10. *Sinwel H. F.* Uniform approximation of differentiable functions by algebraic polynomials // *J. Approx. Theory*, **32** (1981), No. 1, 1–8.

11. *Волков Ю. С.* Об одной задаче экстремальной функциональной интерполяции и константах Фавара //*Доклады АН. Математика, информатика, процессы управления.* 2020. Т. 495. С. 29–32.

    DOI: 10.31857/S2686954320060193

12. *Белых В.Н.* Об абсолютной ε-энтропии одного компакта бесконечно дифференцируемых непериодических функций //*Сибирский математический журнал.* 2018. Т. 59, № 6. С. 1197–1213.

    DOI: 10.17377/smzh.2018.59.601

13. *Белых В. Н.* Оценки александровского n-поперечника компакта C^∞-гладких на конечном отрезке функций //*Сибирский математический журнал.* 2024. Т. 65, №1. С. 1–10.

DOI: 10.33048/smzh.2024.65.101

14. *Шарафутдинов В. А. Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию.* Новосибирск.: Изд-во НГУ. Учебное пособие. 2018. 281 с.

15. *Бабенко К. И. Основы численного анализа.* М.: Наука. 1986. (2-е издание М.- Ижевск. РХД. 2002).

References

1. *Babenko K. I.* Estimating the quality of computational algorithms — part 1, 2 *Computer methods in applied mechanics and engineering.* 1976. V. 7. 47–73, 135–152. North-Holland Publishing Company.

2. *Babenko K. I.* A few remarks on the discretization of elliptic problems. Dokl. USSR Academy of Sciences. 1975. vol. 221, No. 1. pp. 11–14

3. *Babenko K. I.* On the phenomenon of saturation in numerical analysis. Dokl. USSR Academy of Sciences. 1978. vol. 241, No. 3. PP. 505–508.

4. *Anuchina N. N., Babenko K. I., Godunov S. K., et al., Theoretical Foundations and Design of Numerical Algorithms for Problems of Mathematical Physics*, Ed. by K. I. Babenko (Nauka, Moscow, 1977). 293 p. [in Russian].

5. *Belykh V. N.* Unsaturated algorithms for the numerical solution of elliptic boundary value problems in smooth axisymmetric domains,*Siberian Advances in Mathematics.* 2022. Vol. 32. No. 3. PP. 157–185.

DOI: 10.1134/S1055134422030014

6. *Belykh V. N.* On the best approximation properties of C^∞-smooth functions on an interval of the real axis (to the phenomenon of unsaturated numerical methods). *Siberian Mathematical Journal.* Vol. 46. No. 3. PP. 373–385. 2005.

7. *Belykh V. N.* On the Asymptotic Behavior of Alexandrov's n-Width of the Compact Set of Infinitely Smooth Periodic Functions in a Gevrey Class. Siberian Advances in Mathematics, 2024, Vol. 34, No. 4. PP. 261–267.

DOI: 10.1134/S1055134424040011

8. *Tikhomirov V. M. Some Problems of Approximation Theory.* Moscow University. Moscow (1976) [in Russian].

9. *Aleksandroff P. S.* Uber die Urysonsche Konstanten. *Fund. Math.* 1933. 20. 140–150.

10. *Sinwel H. F.* Uniform approximation of differentiable functions by algebraic polynomials. *J. Approx. Theory,* **32** (1981), No. 1, 1–8.

11. *Volkov Yu. S.* One problem of extremal functional interpolation and the Favard constants *Dokl. Math.* 2020. V. 102, No. 3. PP. 474–477.

    DOI:10.1134/S1064562420060216

12. *Belykh V. N.* The absolute ε-entropy of a compact set on infinitely differentiable aperiodic functions. Siberian Mathematical Journal, Vol. 59, No. 6. PP. 947–959. 2018.

    DOI:10.1134/S0037446618060010

13. *Belykh V. N.* Estimates of the Alexandrov's n-width of a the compact of C^∞-smooth functions on a finite segment. Siberian Mathematical Journal, Vol. 65, No. 1. PP. 3–14. 2024.

    DOI: 10.1134/S0037446624010014

14. *Sharafutdinov V. A.* Introduction to differential topology and Riemannian geometry. Novosibirsk.: NSU Publishing House. Study guide (2018), 281 p. [in Russian].

15. *Babenko K. I. Foundations of numerical analysis*, Nauka, Moscow 1986, 744 pp.; 2nd ed., Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika, Moscow-Izhevsk 2002. 848 p. [in Russian].

Информация об авторе

Владимир Никитич Белых, Доктор физико-математических наук,
Author ID: 7780
Scopus Author ID 700 404 6309

Author Information

Vladimir N. Belykh, Doctor of Mathematics,
Author ID: 7780
Scopus Author ID 700 404 6309

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 5-18
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 5-18

Статья поступила в редакцию 08.04.2025;
одобрена после рецензирования 18.06.2025; принята к публикации 07.07.2025

The article was submitted 08.04.2025;
approved after reviewing 18.06.2025; accepted for publication 07.07.2025

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 5-18
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 5-18